УДК 811.111'36/'25
DOI https://doi.org/10.37915/pa.vi53.448

Валько К. В.,*
orcid.org/0000-0002-9746-018X
Кузьмич В. І.,*
orcid.org/0000-0002-8150-3456
Кузьмич Л. В.,*
orcid.org/0000-0002-6727-9064
Савченко О. Г.,*
orcid.org/0000-0003-4687-5542

ЕЛЕМЕНТИ ГРАФІЧНОЇ ІНТЕРПРЕТАЦІЇ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ СТУДЕНТАМИ МЕТРИЧНИХ ПРОСТОРІВ

У статті акцентується, що під час вивчення теорії метричних просторів здобувачами вищої освіти фізико-математичних та інженерних спеціальностей виникають труднощі з розумінням основних співвідношень між окремими точками та множинами точок конкретного метричного простору. Звертається увага на те, що труднощі в засвоєнні студентами відповідного матеріалу значною мірою пов'язані з фактичною відсутністю геометричної інтерпретації цих понять у різних метричних просторах. Для полегшення засвоєння основних понять цієї теорії у статті пропонується використовувати геометричну інтерпретацію та цифрову візуалізацію властивостей взаємного розміщення точок метричного простору. Констатується, що геометричні властивості метричних просторів доцільно демонструвати студентам на прикладах евклідових просторів першого, другого та третього порядків. Наголошується, що властивості взаємного розміщення точок простору можуть значно змінюватись зі зміною його метрики, що пояснюється зміною внутрішньої геометрії простору. У статті наведено приклади такої зміни.

Розглядаються приклади геометричної інтерпретації окремих понять метричного простору залежно від зміни метрики цього простору. Геометрична інтерпретація, звичайно, зводиться до порівняння цих понять із відповідними їх інтерпретаціями в евклідових просторах першого, другого та третього порядків. Це дає можливість наочно побачити зміну внутрішньої геометрії метричного простору в разі, коли його метрика не є метрикою евклідового простору. Така інтерпретація демонструє відмінності між евклідовою та неевклідовими геометріями, що покращить їх розуміння студентами.

Матеріал статті побудовано на прикладах простих метричних просторів, для розуміння яких достатньо змісту шкільного курсу математики. Тому цей матеріал можна використати під час викладання математики в закладах загальної середньої освіти.

Ключові слова: метричні простори, метрика, геометрична інтерпретація, заклади вищої освіти, заклади загальної середньої освіти, профільний рівень навчання, позакласна робота з математики.

Постановка проблеми. Вивчення метричних просторів студентами базується на фундаментальному понятті відстані між двома точками простору, яке було введене в розгляд у вигляді аксіом метричного простору французьким математиком Морісом Рене Фреше 1906 року. На початку вивчення теорії метричних просторів наводиться достатня кількість прикладів таких просторів, включно з одновимірним, двовимірним і тривимірним евклідовими просторами. Геометрична інтерпретація взаємного розміщення точок таких просторів реалізується відповідно на одновимірній, двовимірній і тривимірній прямокутних (декартових) системах координат. Ці системи координат знайомі студентам зі шкільного курсу математики, і геометрична інтерпретація взаємного розміщення точок у цих просторах не викликає в них особливих труднощів. Відповідно це сприяє розумінню студентами відповідних співвідношень між точками евклідових просторів більш високих порядків, хоча конкретної геометричної інтерпретації ці співвідношення не мають. При цьому, як правило, зберігається термінологія, пов'язана з відповідними співвідношеннями в евклідових просторах першого, другого і третього порядків.

Якщо метричний простір не є евклідовим, то, як правило, геометрична інтерпретація взаємного розміщення точок цього простору не розглядається. Це пов'язано зі значною зміною геометрії простору, й основні геометричні поняття, якими студенти звикли оперувати у шкільному курсі математики, набувають зовсім інших форм і властивостей. Зокрема, студентам слід пояснювати, що прямі лінії можуть перетворюватися на криві, обмежені геометричні об'єкти можуть перейти в необмежені, можуть порушуватися властивості паралельності та перпендикулярності прямих і таке інше. Інколи геометричні властивості таких просторів суперечать нашим природним уявленням про навколишнє середовище. Усе це значно ускладнює розуміння студентами теорії метричних просторів.

У цій статті нами наведено приклади геометричної та графічної інтерпретацій взаємного розміщення точок в окремих класичних метричних просторах, які не є евклідовими. Ці простори мають достатньо просте означення відстані між їхніми точками. Для розуміння цих означень студентам достатньо знань зі шкільного курсу математики, які мають просту і зрозумілу навіть для учнів середніх класів геометричну інтерпретацію. Це дає можливість використати геометричні властивості евклідових просторів у геометричній інтерпретації властивостей окремих неевклідових просторів. Крім того, стає можливим простежити зміну геометрії певного простору під час зміни його метрики, що значно полегшує засвоєння студентами елементів неевклідових геометрій, які вивчаються ними в курсі основ геометрії.

Аналіз досліджень. Серед досліджень, присвячених питанням геометризації метричних просторів, слід виокремити фундаментальні монографії М. Берже [8] та Д. Бураго [10], у яких викладено основні положення та найновіші дослідження з метричної геометрії. Значні досягнення в цьому напрямку належать К. Менгеру [14] та Л. Блюменталю [9]. Серед вітчизняних робіт, присвячених різноманітним питанням геометризації метричних просторів, можна відзначити роботи А. Довгошей [3], С. Галущак [2], В. Кузьмича [4; 5], О. Савченко [15; 16]. Питання візуалізації геометричних властивостей метричних просторів розглядалися в роботах І. Ленарт [12; 13], К. Валько [1], В. Кузьмича [11]. Питання впровадження елементів теорії метричних просторів у шкільний курс математики та позакласну роботу з математики розглядалися в дисертації І. Следзинського [7]. Ця стаття є логічним продовженням наукової роботи «Використання елементів геометрії під час вивчення студентами метричних просторів» [6].

Мета статті – полегшити здобувачам вищої освіти фізико-математичних та інженерних спеціальностей засвоєння основних положень і набуття геометричних компетентностей під час вивчення теорії метричних просторів та функціонального аналізу. Матеріал статті відкриває можливість цифровізації навчального процесу під час викладання математики в закладах загальної середньої освіти та ознайомлення їх здобувачів з основами неевклідових геометрій.

Виклад основного матеріалу. Під час викладення подальшого матеріалу будемо уникати складних математичних означень і розрахунків, звертаючи більше уваги на методи інтерпретації та візуалізації геометричних властивостей метричних просторів. Усі необхідні означення, формули та розрахунки наведено в іншій нашій праці [6].

Здобувачів вищої освіти доцільно ознайомити з поняттям прямолінійного розміщення точок метричного простору, акцентувавши, що три точки M_1, M_2, M_3 метричного простору X, з метрикою (відстанню) ?? розміщені прямолінійно в цьому просторі, якщо відстань між двома з них дорівнює сумі відстаней від третьої точки до цих двох точок: ??(M_1, M_2) =??(M_1, M_3)+??(M_2, M_3), або коротше: ??$_{12}$ =??$_{13}$+??$_{23}$. Якщо будь-які три точки множини A точок метричного простору X розміщені прямолінійно у цьому просторі, то будемо казати, що множина A прямолінійно розміщена у просторі X.

У зазначеній праці ([6]) розглянуто приклад чотирьох точок $M_1(0;1)$, $M_2(0;-1)$, $M_3(-1;0)$, $M_4(1;0)$, які у двовимірній декартовій (прямокутній) системі координат (у двовимірному евклідовому просторі R^2) лежать у вершинах квадрату з довжиною сторони $\sqrt{2}$. За відстань між двома точками цього простору беруть довжину відрізка, який з'єднує ці точки. Тобто в цьому просторі виконуються рівності ??$_{13}$ =??$_{23}$ =??$_{24}$ =??$_{14}$ = $\sqrt{2}$, а також ??$_{12}$ =??$_{34}$ = 2 (рис. 1).

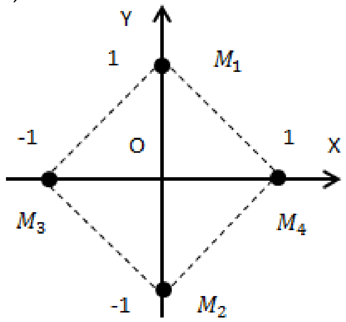

Рис. 1. Положення точок M_1, M_2, M_3 у просторі R^2

Відстань між точками $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$ координатної площини можна вибрати інакше – наприклад, за формулою:

$$??_{12} = max\{|x_1 - x_2|;\ |y_1 - y_2|\},$$

і такий простір позначають R_0^2. Якщо за цією формулою вирахувати відстані між точками M_1, M_2, M_3, M_4, то будемо мати ??$_{12}$ = 2, ??$_{13}$ = 1, ??$_{14}$ = 1, ??$_{23}$ = 1, ??$_{24}$ = 1, ??$_{34}$ = 2 [16]. У цьому разі легко перевірити, що будь-які три з цих точок прямолінійно розміщені, а отже, усі чотири точки прямолінійно розміщені у просторі R_0^2. Цей приклад вказує на зміну геометричних властивостей простору при зміні його метрики (викривлення простору). Одночасно слід акцентувати увагу студентів на тому, що цей приклад вказує на існування неевклідової геометрії й демонструє певні її метричні властивості. Цей приклад можна проілюструвати студентам також і наочно. Зокрема, якщо за точки простору взяти точки кола радіусом $R = \frac{2}{??}$, довжина якого буде дорівнювати чотирьом, а за відстань між двома його точками вибрати довжину найменшої з двох дуг кола, які з'єднують ці точки, то точки M_1, M_2, M_3, M_4 будуть розміщені на кінцях двох взаємно перпендикулярних діаметрів цього кола (рис. 2).

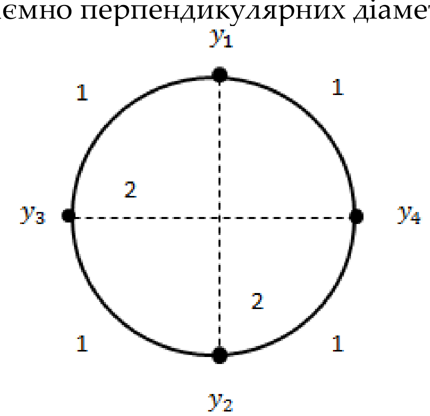

Рис. 2. Інтерпретація прямолінійного розміщення точок M_1, M_2, M_3, M_4 у просторі R_0^2

Незважаючи на подібність розміщень точок M_1, M_2, M_3, M_4 в обох випадках, їх сутність значно відрізняється. На рис. 2 усі точки кола розміщені прямолінійно у просторі R_0^2. Це демонструє зміну геометрії простору при зміні його метрики, й образом прямої лінії в цьому переході стало коло. Слід акцентувати увагу студентів на тому, що зобразити розміщення точок M_1, M_2, M_3, M_4 на числовій осі (в одномірному евклідовому просторі R^1) не можливо, оскільки у просторі R_0^2 кожна з цих точок лежить між деякими двома іншими.

Для розуміння студентами просторового розміщення точок рекомендується розглянути приклад геометричної інтерпретації розміщення точок метричного простору, кожна точка y якого є лінійною функцією $y = kx + b$, означеною на відрізку $[0; 1]$. За відстань між двома точками y_1 і y_2 цього простору можна вибрати число $\rho_{12} = max_{x\in[0;1]}|y_1 - y_2|$. Простір з такою метрикою позначають $C_{[0;1]}$.

Розглянемо у просторі $C_{[0,1]}$ чотири функції (точки простору): $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = x$, $y_4 = 1 - x$. У просторі R^2 графіки цих функцій мають вигляд як на рис. 3.

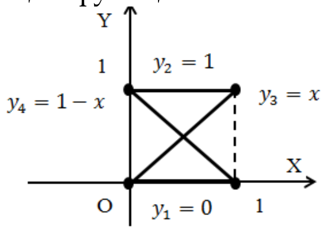

Рис. 3. Графіки функцій y_1, y_2, y_3, y_4 у просторі R^2

За метрикою простору $C_{[0,1]}$ відстані між точками y_1, y_2, y_3, y_4 будуть такими: $??_{12} = ??_{13} = ??_{14} = ??_{23} = ??_{24} = ??_{34} = 1$. Геометричною інтерпретацією такого розміщення точок у просторі $C_{[0;1]}$ можуть бути чотири вершини правильного тетраедра у тривимірному евклідовому просторі (просторі R^3), довжини ребер якого дорівнюють одиниці.

Для більш глибокого розуміння студентами попереднього прикладу слід використати цифрову візуалізацію відповідного розміщення точок. При цьому можна використати, наприклад, динамічне геометричне середовище GeoGebra 3D. Складність у цьому разі полягає в тому, що практично всі засоби цифрової візуалізації вимагають уведення координат вершин тетраедра. Однак авторами отримано відповідні формули, за якими встановлюються ці координати, враховуючи орієнтацію тетраедра та довжини його ребер. Це дає змогу будувати в динамічному геометричному середовищі GeoGebra 3D зображення цього тетраедра, причому його можна повертати у просторі й розглядати піраміду з усіх можливих ракурсів (рис. 4).

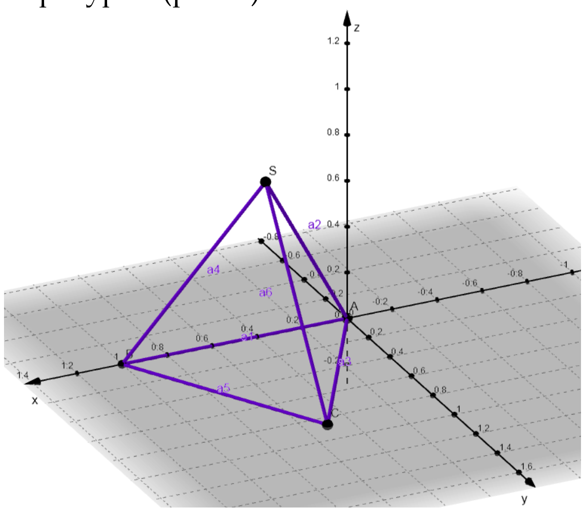

Рис. 4. Інтерпретація розміщення точок y_1, y_2, y_3, y_4 простору $C_{[0,1]}$ у просторі R^3

Висновки. Наведені в роботі приклади візуалізації геометричних властивостей найпростіших метричних просторів, відмінних від евклідових, указують на можливість такої візуалізації в більш складних випадках взаємного розміщення точок метричного простору. Це полегшить розуміння та засвоєння студентами основних понять теорії метричних просторів. Розв'язування задач на побудову геометричних інтерпретацій різних множин точок метричних просторів сприятиме формуванню геометричних компетентностей студентів і дозволить сформувати окремий розділ таких задач у теорії метричних просторів.

Оскільки при побудові геометричної інтерпретації та візуалізації взаємного розміщення точок метричного простору використовуються найпростіші поняття метричної геометрії, елементарні аналітичні перетворення та доступні графічні засоби, то окремі задачі можна розглядати при вивченні відповідних розділів у курсі шкільної математики учнями профільних класів із поглибленим вивченням математики або в різних формах неформальної освіти. Таким чином, здобувачі освіти закладів загальної середньої освіти можуть отримати початкові відомості про найпростіші поняття та властивості неевклідових геометрій.

У подальшому науковому пошуку слід розробити систему задач зі створення графічних інтерпретацій та цифрових візуалізацій основних властивостей взаємного розміщення точок основних метричних просторів, які можуть бути використані викладачами та студентами закладів вищої освіти. Зокрема, доцільно розробити відповідні задачі з графічної інтерпретації та цифрової візуалізації властивостей перпендикулярного й паралельного розміщення точок метричного простору.

Список використаних джерел:

1. Валько К., Кузьмич В., Кузьмич Л., Савченко О. Інтерпретація взаємного розміщення точок метричного простору за допомогою графічних засобів. *Фізико-математична освіта*. Суми: Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка, 2022. Вип. 2 (34). С. 7-11. URL: https://doi.org/10.31110/2413-1571-2022-034-2-001.
2. Галущак С. І. Деякі геометричні криві у сенсі d-відрізка. *Прикарпатський вісник НТШ. Число*. 2016. № 1 (33). С. 157–166.
3. Довгошей А. А., Дордовский Д. В. Отношение лежать между и изометрические вложения метрических пространств. *Укр. мат. журн*. 2009. Том 61, № 10. С. 1319–1328.
4. Кузьмич В. І. Формування в школярів понять відстані та прямолінійності засобами метричної геометрії. *Педагогічний альманах*: збірник наукових праць / редкол. В. В. Кузьменко (голова) та ін. Херсон: КВНЗ «Херсонська академія неперервної освіти», 2019. Випуск 42. С. 43–50. URL: https://drive.google.com/file/d/1pA6d7aFTMfnrC6hlgLlZDjDwO5TRPjmg/view.
5. Кузьмич В. І., Кузьмич Л. В. Формування поняття кута у шкільному курсі математики засобами метричної геометрії. *Педагогічний альманах*: збірник наукових праць / редкол. В. В. Кузьменко (голова) та ін. Херсон: КВНЗ «Херсонська академія неперервної освіти», 2020. Випус 46. С. 56–63. URL: https://doi.org/10.37915/pa.vi46.108.
6. Кузьмич В. І., Кузьмич Л. В., Савченко О. Г. Використання елементів геометрії під час вивчення студентами метричних просторів. *Педагогічний альманах: збірник наукових праць* / редкол. В. В. Кузьменко (голова) та ін. Херсон: КВНЗ «Херсонська академія неперервної освіти», 2021. Випуск 49. С. 42–48. URL: https://doi.org/10.37915/pa.vi49.248.
7. Следзинский И. Ф. Формирование понятий расстояния и метрического пространства у учащихся общеобразовательной средней школы: автореф. дис. ... канд. пед. наук. Київ: Київський державний педагогічний інститут ім. О. М. Горького,1973. 22 с.
8. Berger M. Geometry I. Springer, 2009. 432 p.
9. Blumenthal L. Theory and applications of distance geometry. Chelsea Publishing Company, 1970. 347 c.
10. Burago D., Burago Y., Ivanov S. A course in metric geometry. AMS, 2001. 415 p.
11. Kuz'mich V. I., Kuzmich L. V, Savchenko A. G., Valko K. V. Geometric interpretation and visualization of particular geometric concepts at metric spaces study. *Journal of Physics: Conference Series*, Volume 2288, XIV International Conference on Mathematics, Science and Technology

Education 18/05/2022 – 20/05/2022 Kryvyi Rih, Ukraine. URL: https://doi.org/10.1088/1742-6596/2288/1/012024.
12. Lenart I. The Algebra of Projective Spheres on Plane, Sphere and Hemisphere. *J. of Appl. Math. And Phys*. 2020. V. 8, No. 10. Pp. 2286–2333. URL: https://doi.org/10.4236/jamp.2020.810171.
13. Lenart I., Rybak A. Comparative Geometry in Primary and Secondary School. *The Pedagogy of Mathematics: Is There a Unifying Logic? Johannesburg: Mapungubwe Institute for Strategic Reflection (MISTRA)*. 2017. Pp. 107–124.
14. Menger K. Untersuchungen uber allgemeine Metric. *Math. Ann.*, 1928. Pp. 75–163.
15. Savchenko O. A remark on stationary fuzzy metric spaces. *Карпатські математичні публікації*. 2011. Том 3, № 1. С. 124–129. URL: https://journals.pnu.edu.ua/index.php/cmp/article/view/3091/3510.
16. Savchenko A. Fuzzy hyperspace monad. *Математичні студії*. 2010. Том 33, № 2. С. 192–198. URL: http://matstud.org.ua/texts/2010/33_2/192-198.pdf.

References:

1. Valko, K., Kuzmych, V., Kuzmych, L., & Savchenko, O. (2022). Interpretatsiia vzaiemnoho rozmishchennia tochok metrychnoho prostoru za dopomohoiu hrafichnykh zasobiv [Interpretation of mutual location of points of metric space by help of graphic means]. *Fizyko-matematychna osvita,* 2 (34), 7-11. Retrieved from https://doi.org/10.31110/2413-1571-2022-034-2-001 [in Ukrainian].
2. Halushchak, S. I. (2016). Deiaki heometrychni kryvi u sensi d-vidrizka [Some geometric curves in the sense of a d-segment]. *Prykarpatskyi visnyk NTSh. Chyslo,* 1(33), 157–166 [in Ukrainian].
3. Dovgoshei, A. A., & Dordovskii, D. V. (2009). Otnoshenie lezhat mezhdu i izometricheskie vlozheniia metricheskikh prostranstv [The relation lie between and isometric embeddings of metric spaces]. *Ukr. mat. zhurn.,* 61 (10), 1319–1328 [in Russian].
4. Kuzmych, V. I. (2019). Formuvannia v shkoliariv poniat vidstani ta priamoliniinosti zasobamy metrychnoi heometrii [Forming the concepts of distance and straightness in schoolchildren by means of metric geometry]. *Pedahohichnyi almanakh,* 42, 43–50. Retrieved from https://drive.google.com/file/d/1pA6d7aFTMfnrC6hlgLlZDjDwO5TRPjmg/view [in Ukrainian].
5. Kuzmych, V. I., & Kuzmych, L. V. (2020). Formuvannia poniattia kuta u shkilnomu kursi matematyky zasobamy metrychnoi heometrii [Formation of the concept of angle in the school course of mathematics by means of metric geometry]. *Pedahohichnyi almanakh,* 46, 56–63. Retrieved from https://doi.org/10.37915/pa.vi46.108 [in Ukrainian].
6. Kuzmych, V. I., Kuzmych, L. V., & Savchenko, O. H. (2021). Vykorystannia elementiv heometrii pid chas vyvchennia studentamy metrychnykh prostoriv [The use of elements of geometry during students' study of metric spaces]. *Pedahohichnyi almanakh,* 49, 42–48. Retrieved from https://doi.org/10.37915/pa.vi49.248 [in Ukrainian].
7. Sledzinskii, I. F. (1973). *Formirovanie poniatii rasstoianiia i metricheskogo prostranstva u uchashchikhsia obshcheobrazovatelnoi srednei shkoly* [Formation of the concepts of distance and metric space in secondary school students]. (Extended abstract of candidate's thesis). Kyiv [in Ukrainian].
8. Berger, M. (2009). Geometry I. Springer [in English].
9. Blumenthal, L. (1970). Theory and applications of distance geometry. *Chelsea Publishing Company* [in English].
10. Burago, D., Burago, Y., & Ivanov, S. (2001). A course in metric geometry. AMS [in English].
11. Kuz'mich, V. I., Kuzmich, L. V., Savchenko, A. G., & Valko, K. V. (2022). Geometric interpretation and visualization of particular geometric concepts at metric spaces study. *Journal of Physics: Conference Series,* XIV International Conference on Mathematics, Science and Technology Education. Kryvyi Rih [in English].
12. Lenart, I. (2020). The Algebra of Projective Spheres on Plane, Sphere and Hemisphere. *J. of Appl. Math. and Phys.,* 10 (8), 2286–2333 [in English].
13. Lenart, I., & Rybak, A. (2017). Comparative Geometry in Primary and Secondary School. *The Pedagogy of Mathematics: Is There a Unifying Logic? Johannesburg: Mapungubwe Institute for Strategic Reflection (MISTRA),* 107-124 [in English].
14. Menger, K. (1928). Untersuchungen uber allgemeine Metric. *Math. Ann.,* 75–163 [in German].
15. Savchenko, O. (2011). A remark on stationary fuzzy metric spaces. *Karpatski matematychni publikatsii,* 3 (1), 124–129 [in English].
16. Savchenko, A. (2010). Fuzzy hyperspace monad. *Matematychni studii,* 33 (2), 192–198 [in English].

Valko K. V.,
orcid.org/0000-0002-9746-018X
Kuzmich V. I.,
orcid.org/0000-0002-8150-3456
Kuzmich L. V.,
orcid.org/0000-0002-6727-9064
Savchenko A. G.,
orcid.org/0000-0003-4687-5542

ELEMENTS OF GRAPHIC INTERPRETATION DURING THE STUDY OF METRIC SPACES BY STUDENTS

The article emphasizes that when studying the theory of metric spaces, students of higher education in physical, mathematical and engineering specialties have difficulties in understanding the main relationships between individual points and sets of points of a specific metric space. Attention is drawn to the fact that difficulties with students' assimilation of the relevant material are, to a large extent, related to the actual lack of geometric interpretation of these concepts in different metric spaces. To facilitate learning of the basic concepts of this theory, the article proposes to use geometric interpretation and digital visualization of the properties of mutual placement of points in metric space. It is concluded that it is expedient to demonstrate the geometric properties of metric spaces to students using the examples of Euclidean spaces of the first, second and third orders. It is emphasized that the properties of the mutual location of the points of the space can change significantly with a change in its metric, which is explained by a change in the internal geometry of the space. The article provides examples of such a change.

Examples of geometric interpretation of certain concepts of the metric space depending on the change of the metric of this space are considered. Geometric interpretation, of course, comes down to comparing these concepts with their corresponding interpretations in Euclidean spaces of the first, second, and third orders. This makes it possible to visually see the change of the internal geometry of the metric space in the case when its metric is not the metric of the Euclidean space. Such an interpretation demonstrates the differences between Euclidean and non-Euclidean geometries, which will improve their understanding by students.

The material of the article is based on examples of simple metric spaces, for the understanding of which the content of the school mathematics course is sufficient. Therefore, this material can be used when teaching mathematics in institutions of general secondary education.

Key words: metric spaces, metrics, geometric interpretation, institutions of higher education, institutions of general secondary education, specialized level of education, extracurricular work in mathematics, geometric competence.

Дата надходження статті: 03.05.2023 р.
Рецензент: доктор педагогічних наук, професор Кузьменков С. Г.

УДК 378.147
DOI https://doi.org/10.37915/pa.vi53.452

Корх М. В.*[*]*,*
orcid.org/0000-0002-9401-5240

ФОРМУВАННЯ М'ЯКИХ НАВИЧОК МАЙБУТНІХ МОРСЬКИХ ФАХІВЦІВ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ ДИСЦИПЛІНИ «НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ ТА ІНЖЕНЕРНА ГРАФІКА»

У статті проаналізовано особливості формування м'яких навичок у майбутніх фахівців морського транспорту під час вивчення дисципліни «Нарисна геометрія та інженерна графіка».

Визначено, що сьогодні проводяться численні дослідження щодо формування гнучких навичок у майбутніх моряків; вибудовуються різнорівневі освітні програми, орієнтовані